

# 一种快速的解盲源分离新算法

徐先峰<sup>1,2</sup>, 冯大政<sup>2</sup>

(1. 长安大学电子与控制工程学院, 陕西西安 710064; 2. 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 针对盲源分离问题, 提出一种基于接收信号不同延时下自相关矩阵组的快速联合对角化算法(FJD). 采用乘性迭代机制求解表征联合对角化近似程度的 F-范数代价函数. 对代价函数的合理近似及巧妙求解, 是算法快速有效的核心原因. 每步迭代得到的严格对角占优更新矩阵, 保证联合对角化器严格可逆, 防止收敛到平凡解. 算法具有不需要预白化操作, 不限定待对角化目标矩阵的正定性, 并能处理复值数据等诸多优点, 具有极广的适用性. 详细的计算复杂度分析说明了算法的高效性及易操作性. 仿真结果表明, FJD 算法收敛速度快, 性能良好, 能有效地解决盲源分离问题.

**关键词:** 盲源分离; 快速联合对角化; 乘性迭代; 严格对角占优矩阵

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2010) 12-2780-06

## A Fast Algorithm for Blind Source Separation

XU Xian-feng<sup>1,2</sup>, FENG Da-zheng<sup>2</sup>

(1. School of Electronic and Control Engineering, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;

2. National Key Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** In order to solve the blind source separation (BSS) problems, a fast joint diagonalization (FJD) algorithm based on the diagonalization of a set of output auto-correlation matrices at different delays is proposed. The algorithm adopts a multiplicative update scheme to minimize the Frobenius-norm formulation of the approximate joint diagonalization problem. The special approximation of the cost function and the skilful denotation of concerning variables contribute to the highly computational efficiency of the algorithm. In each of multiplicative iterations, a strictly diagonally-dominant updated matrix is obtained, ensuring the invertibility of the diagonalizer and preventing the convergence to trivial values. The algorithm discards pre-whitening procedure, relaxes the positive-definiteness assumption on target matrices and can be used in complex-valued space, thus has more general utilizations. Computational complexity analysis shows the efficiency and easy implementation of FJD. Extensive numerical simulations illustrate the high convergent speed and good performance of FJD. Thus it can be used to solve the BSS problems efficiently.

**Key words:** blind source separation (BSS); fast joint diagonalization (FJD); multiplicative update; strictly diagonally-dominant matrix

## 1 引言

在源信号和传输信道参数等先验知识未知的情况下, 仅根据输入源信号的统计特性, 由观测信号估计信道参数、恢复源信号的技术称为盲源分离. 在过去的二十多年里, 随着大量有效算法的提出, 盲源分离技术得到了极大发展, 已广泛应用于无线通信, 雷达, 图像, 语音, 生物医学, 地震波检测等各个领域, 成为信号处理领域中炙手可热的研究课题<sup>[1~10]</sup>.

联合对角化方法是解盲源分离问题的一类常用且有效的方法. 在现存算法中, 有很多算法, 例如 JADE 算法<sup>[1]</sup>和 SOBI 算法<sup>[2]</sup>等, 均要求目标矩阵组中存在正定

矩阵, 以利用正定矩阵进行预白化处理, 将待求的联合对角化器先转化成酉矩阵后再求解. 但是, 正如 Souloumiac 所指出的<sup>[3]</sup>, 由于目标矩阵组通常都是通过统计方法得到, 本身存在一定的误差, 正定性难以保证, 这就导致了白化操作的不精确, 更严重的是, 这种在预处理阶段引入的误差, 无法在随后的正交联合对角化算法中得以校正, 影响了算法的性能. 鉴于此, 许多研究者提出了若干不需要白化预处理的非正交联合对角化方法. 其中比较有代表性的算法是: ACDC 算法<sup>[4]</sup>, FAJD 算法<sup>[5]</sup>, FFDIAG 算法<sup>[6]</sup>, QDIAG 算法<sup>[7]</sup>, WEDGE 算法<sup>[8]</sup>, 以及最新提出的 J-Di 算法<sup>[3]</sup>. 然而, 在这些算法中, 大部分算法都假设目标矩阵组必须为实值<sup>[3,6,8]</sup>, 意味着限

定待处理的混迭矩阵和信号必须为实值,这就极大制约了算法的应用范围.本文提出了一种快速联合对角化(Fast Joint Diagonalization, FJD)算法,既取消了白化操作,又允许目标矩阵组为复值,提高了算法的适用性.与具有相似特点的 ACDC 算法<sup>[4]</sup>与 FAJD 算法<sup>[5]</sup>相比, FJD 具有收敛速度快,计算复杂度低的优点,有效地解决了盲源分离问题.

## 2 信号模型

考虑有  $M$  个阵元组成的线阵,  $N$  个窄带源从不同方向入射到阵列上,阵列接收到的  $M$  维数据矢量为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (1)$$

这里  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$  ( $M \geq N$ ) 称为混迭矩阵,  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T$  为源信号矢量,  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_M(t)]^T$  为观测信号,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_M(t)]^T$  代表噪声矢量.盲源分离问题所要解决的问题便是,根据所得到的观测信号的  $T$  个样本  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^T$ , 估计混迭矩阵  $\mathbf{A}$ , 并进一步估计源信号的样本  $\{\mathbf{s}(t)\}_{t=1}^T$ .

为了求解盲源分离问题,通常作如下假设<sup>[9]</sup>:

**假设 1** 混迭矩阵  $\mathbf{A}$  为列满秩矩阵;

**假设 2** 源信号是零均值,相互独立的平稳信号,即:  $E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t+\tau)\} = \text{diag}[\rho_1(\tau), \dots, \rho_N(\tau)]$ ;

**假设 3** 所有源信号中只能有一个高斯白的;

**假设 4** 加性噪声  $\mathbf{n}(t)$ , 为零均值,独立同分布,空时白噪声,且与源信号相互独立.

基于以上假设,观测信号在零延时和  $K-1$  个非零延时  $\tau_i$  ( $i=1, \dots, K-1$ ;  $\tau_i = i\Delta t$ ,  $\Delta t$  为延时步长)下的自相关矩阵具有如下对角化结构:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(0) &= E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} \\ &= \mathbf{A} \text{diag}[\rho_1(0), \dots, \rho_N(0)] \mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(\tau_i) &= E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t+\tau_i)\} \\ &= \mathbf{A} \text{diag}[\rho_1(\tau_i), \dots, \rho_N(\tau_i)] \mathbf{A}^H \end{aligned} \quad (3)$$

实际处理中,接收信号的二阶相关矩阵由通过观测信号的  $T$  个样本  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^T$  估计得到.据此,我们就得到了一组具有对角化结构的接收信号不同延时下自相关矩阵,它们组成了待联合对角化的目标矩阵组,为了表示简便,下文中将其简记为  $\{\mathbf{C}^k, k=1, \dots, K\}$ .并且,根据已有的科学降维方法<sup>[9,10]</sup>,不失一般性,假设阵元数  $M$  等于信源数  $N$ .

## 3 快速联合对角化算法

### 3.1 算法描述

我们寻找一个联合对角化器  $\mathbf{V}$ ,使得如下表征联合对角化近似程度的 F-范数代价函数最小:

$$L(\mathbf{V}) = \min_{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{M \times N}} \sum_{k=1}^K \text{off}(\mathbf{V}\mathbf{C}^k\mathbf{V}^H) \quad (4)$$

式中,  $\text{off}(\mathbf{V}\mathbf{C}^k\mathbf{V}^H)$  表示矩阵  $\mathbf{V}\mathbf{C}^k\mathbf{V}^H$  非对角线元素的 F-范数,即:  $\sum_{i \neq j} (\mathbf{V}\mathbf{C}^k\mathbf{V}^H)_{ij}^2$ .通常地,  $\mathbf{V}$  作为混迭矩阵  $\mathbf{A}$  的逆矩阵的估计,又被称为解混迭矩阵.显然地,求得使式(4)代价函数最小的联合对角化器  $\mathbf{V}$ ,便能估计信道参数  $\mathbf{A} = \mathbf{V}^{-1}$ ,并得到源信号的估计  $\hat{\mathbf{s}}(t): \hat{\mathbf{s}}(t) \doteq \mathbf{V}\mathbf{x}(t)$ ,解决了盲源分离问题.

采用乘性迭代机制求解式(4)代价函数:在第  $n$  步迭代时,令  $\mathbf{V}_{(n)}$  具有形式  $\mathbf{V}_{(n)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)})\mathbf{V}_{(n-1)}$ ,其中  $\mathbf{I}$  为单位阵,更新矩阵  $\mathbf{W}_{(n)}$  主对角线元素被限制为零,通过求解其非对角线元素,使得代价函数最小.需要指出的是,代价函数式(4)具有平凡解  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ .在迭代过程中,我们通过设定  $\mathbf{V}_{(n)}$  的可逆性来阻止其收敛至平凡解.显然地,  $\mathbf{V}_{(n)}$  的可逆性可以通过  $\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)}$  的可逆性来保证.为了讨论  $\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)}$  的可逆性问题,引出如下定义和定理:

**定义 1** 一个  $N \times N$  的矩阵  $\mathbf{F}$ ,若其所有对角线元素满足条件  $|f_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^N |f_{ij}|$ , 则  $\mathbf{F}$  是严格对角占优的.

**定理 1 (Levi-Desplanques 理论<sup>[11]</sup>)** 如果一个  $N \times N$  的矩阵  $\mathbf{F}$  是严格对角占优的,那么它是可逆矩阵.

根据定理 1, 如果  $\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)}$  是对角占优的,那么它就是可逆的,由于  $\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)}$  所有对角线元素为 1, 那么只要满足  $\max_i \sum_{j \neq i} |w_{ij}^n| = \|\mathbf{W}_{(n)}\|_{\infty} < 1$ ,  $\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)}$  便是对角占优的.在迭代过程中,我们设定一个常数  $0 < \theta < 1$ , 并令  $\mathbf{W}_{(n)} = \frac{\theta}{\|\mathbf{W}_{(n)}\|_{\infty}} \mathbf{W}_{(n)}$ , 以保证  $\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)}$  是对角占优的.

以第  $n$  步迭代为例说明我们的算法:在第  $n$  步时,求解更新  $\mathbf{W}_{(n)}$ ,将待对角化的目标矩阵  $\mathbf{C}_{(n)}^k, k=1, \dots, K$  转化成  $\mathbf{C}_{(n+1)}^k, k=1, \dots, K$ , 并使得所有的  $\mathbf{C}_{(n+1)}^k$  都尽量对角化,表示为:

$$\mathbf{C}_{(n+1)}^k = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)})\mathbf{C}_{(n)}^k(\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)})^H \quad (5)$$

令  $\mathbf{D}_{(n)}^k$  和  $\mathbf{E}_{(n)}^k$  分别表示  $\mathbf{C}_{(n)}^k$  的对角部分和非对角部分,那么式(5)可被简化为:

$$\mathbf{C}_{(n+1)}^k \approx \mathbf{D}_{(n)}^k + \mathbf{W}_{(n)}\mathbf{D}_{(n)}^k + \mathbf{D}_{(n)}^k\mathbf{W}_{(n)}^H + \mathbf{E}_{(n)}^k \quad (6)$$

我们假设  $\mathbf{W}_{(n)}$  和  $\mathbf{E}_{(n)}^k$  的模值都较小,所以,在表达式(6)中,所有含有  $\mathbf{W}_{(n)}$  和  $\mathbf{E}_{(n)}^k$  二次项部分都被忽略掉了,这种近似是导致我们算法计算复杂度低且收敛快速的一个重要原因,同时,也要说明的是,正是由于这一假设,丢弃了含有  $\mathbf{W}_{(n)}$  和  $\mathbf{E}_{(n)}^k$  二次项的信息,降低了每步迭代中所求得的更新矩阵  $\mathbf{W}_{(n)}$  的计算精度,从而在一定程度上,限制了 FJD 算法的收敛精度,仿真实验体现了这种近似的合理结果.观察式(6),  $\mathbf{D}_{(n)}^k$  已经是对角阵了,那么,使  $\mathbf{C}_{(n+1)}^k$  尽量对角化等价于使  $\mathbf{W}_{(n)}\mathbf{D}_{(n)}^k$

+  $\mathbf{D}_{(n)}^k \mathbf{W}_{(n)}^H + \mathbf{E}_{(n)}^k$  尽量对角化, 此时, 关于  $\mathbf{V}$  的代价函数式(4)便被等价转化成了关于  $\mathbf{W}_{(n)}$  的函数形式:

$$L(\mathbf{W}_{(n)}) = \min_{\mathbf{W}_{(n)} \in \mathbf{C}^{n \times n}} \sum_{k=1}^K \text{off}(\mathbf{W}_{(n)} \mathbf{D}_{(n)}^k + \mathbf{D}_{(n)}^k \mathbf{W}_{(n)}^H + \mathbf{E}_{(n)}^k) \quad (7)$$

下面详尽叙述求解式(7)代价函数以获得更新矩阵  $\mathbf{W}_{(n)}$  的主要步骤.

### 3.2 求解更新矩阵

为了简化表示, 我们忽略式(7)中的迭代步数标示  $n$ , 则式(7)可表示为

$$L(\mathbf{W}) = \min_{\mathbf{W} \in \mathbf{C}^{N \times N}} \sum_{k=1}^K \text{off}(\mathbf{W} \mathbf{D}^k + \mathbf{D}^k \mathbf{W}^H + \mathbf{E}^k) \quad (8)$$

更有技巧性地, 以元素的形式表示函数(8)可得:

$$L(\mathbf{W}) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=m+1}^N \{ |w_{mn} d_n^k + w_{nm}^* d_m^k + e_{mn}^k|^2 + |w_{mn} d_m^k + w_{nm}^* d_n^k + e_{nm}^k|^2 \} \quad (9)$$

其中  $w_{ij}$ ,  $e_{ij}^k$  分别表示  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{E}^k$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素,  $d_i^k$  表示对角矩阵  $\mathbf{D}^k$  对角线上的第  $i$  个元素. 分别令  $\bar{w}_{ij}$  和  $\underline{w}_{ij}$  表示  $w_{ij}$  的实部和虚部, 同样地,  $\bar{e}_{ij}^k$ ,  $\underline{e}_{ij}^k$ ,  $\bar{d}_i^k$  和  $\underline{d}_i^k$  的意义可据此类推. 进一步地, 巧妙地定义如下  $4 \times 1$  的向量

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(k) &= [\bar{d}_n^k, -\underline{d}_n^k, \bar{d}_m^k, \underline{d}_m^k]^T, \\ \mathbf{d}_2(k) &= [\underline{d}_n^k, \bar{d}_n^k, \underline{d}_m^k, -\bar{d}_m^k]^T, \\ \mathbf{d}_3(k) &= [\bar{d}_n^k, \underline{d}_n^k, \bar{d}_m^k, -\underline{d}_m^k]^T, \\ \mathbf{d}_4(k) &= [\underline{d}_n^k, \bar{d}_n^k, \underline{d}_m^k, \bar{d}_m^k]^T, \\ \mathbf{w}_{mn} &= [\bar{w}_{mn}, \underline{w}_{mn}, \bar{w}_{nm}, \underline{w}_{nm}]^T, \end{aligned}$$

则式(9)可以转化表示为:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}_{mn}) &= \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=m+1}^N \sum_{k=1}^K \{ |d_1^T(k) \mathbf{w}_{mn} + \bar{e}_{mn}^k|^2 + |d_2^T(k) \mathbf{w}_{mn} + \underline{e}_{mn}^k|^2 \} \\ &+ \{ |d_3^T(k) \mathbf{w}_{mn} + \bar{e}_{nm}^k|^2 + |d_4^T(k) \mathbf{w}_{mn} + \underline{e}_{nm}^k|^2 \} \quad (10) \end{aligned}$$

此时, 代价函数已经由关于矩阵  $\mathbf{W}$  的函数(式(8))转化成了关于待求矩阵  $\mathbf{W}$  的两个对称元素的实部和虚部组成的向量  $\mathbf{w}_{mn}$  的函数(式(10)). 求代价函数  $L(\mathbf{w}_{mn})$  关于  $\mathbf{w}_{mn}$  的导数并令导数为零, 可求得  $\mathbf{w}_{mn}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{mn} &= - \left\{ \sum_{k=1}^K \mathbf{d}_1(k) \mathbf{d}_1^T(k) + \mathbf{d}_2(k) \mathbf{d}_2^T(k) + \mathbf{d}_3(k) \mathbf{d}_3^T(k) \right. \\ &+ \left. \mathbf{d}_4(k) \mathbf{d}_4^T(k) \right\}^{-1} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^K \bar{e}_{mn}^k \mathbf{d}_1(k) + \underline{e}_{mn}^k \mathbf{d}_2(k) \right. \\ &+ \left. \bar{e}_{nm}^k \mathbf{d}_3(k) + \underline{e}_{nm}^k \mathbf{d}_4(k) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

将求得的  $\mathbf{w}_{mn}$  表示为:  $\mathbf{w}_{mn} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$ , 那么,  $\mathbf{W}$  的两个对称元素  $w_{mn}$  和  $w_{nm}$  可分别求得:  $w_{mn} = w_1 + j * w_2$ ,  $w_{nm} = w_3 + j * w_4$ . 当式(11)中的  $m, n$  分别取不同的值  $m=1, \dots, N-1, n=m+1, \dots, N$  时, 总共可以求得  $N(N-1)/2$  个  $4 \times 1$  的向量  $\mathbf{w}_{mn}$ , 据此,  $\mathbf{W}$  所有关于对角线对称的元素  $w_{mn}$  和  $w_{nm}$  可以分别成对求得, 最

终得到更新矩阵  $\mathbf{W}$ .

### 3.3 计算复杂度分析

本节给出 FJD 算法详细的计算复杂度分析, 为了便于比较, 也给出了现存的, 可同样应用于复数域的不需要白化操作的联合对角化算法 ACDC<sup>[4]</sup> 和 FAJD<sup>[5]</sup> 的计算复杂度分析. 通过分析各个算法在每步迭代时所需要的乘除次数 (number of multiplications and divisions, MDN) 来表征算法的计算复杂度.

对于 ACDC 算法, 在 AC 阶段, 计算  $\bar{\mathbf{C}}^k = \mathbf{A} \mathbf{A}^k \mathbf{A}^H$  ( $k=1, \dots, K$ ) 需要  $K(N^3 + N^2)$  MDN, 计算所有的  $\mathbf{P}_m = \sum_{k=1}^K \lambda_m^{k*} [\mathbf{C}^k - \bar{\mathbf{C}}^k + \lambda_m^k \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^H]$  ( $m=1, \dots, N$ ) 需要  $(2KN^2 + KN)N$  MDN, 计算所有  $\mathbf{P}_m$  ( $m=1, \dots, N$ ) 的最大特征向量需要  $3N^3N$  MDN<sup>[11]</sup>. 在 DC 阶段, 计算  $\mathbf{H} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A}^H \mathbf{A})$  需要  $N^3 + N^2$  的 MDN, 计算所有  $\mathbf{r}_k = [\mathbf{a}_1^H \mathbf{C}^k \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N^H \mathbf{C}^k \mathbf{a}_N]^T$  ( $k=1, \dots, K$ ) 需要  $KN^3$  MDN, 在忽略所有的阶数低于  $O(KN^3)$  和  $O(N^4)$  的 MDN 后, 求解所有的  $\mathbf{H}\lambda_k = \mathbf{r}_k$  ( $k=1, \dots, K$ ) 需要  $\frac{KN^3}{3}$  MDN. 因此, 在忽略阶数低于  $O(KN^3)$  和  $O(N^4)$  的 MDN 后, ACDC 算法每步迭代需要计算  $\frac{13}{3}KN^3 + 3N^4$  的 MDN.

忽略权变量, FAJD 算法的代价函数是 F-范数代价函数并结合了一个惩罚项:  $L(\mathbf{V}) = \min_{\mathbf{V}} [\sum_{k=1}^K \text{off}(\mathbf{V}^H \mathbf{C}^k \mathbf{V}) - \log |\det(\mathbf{V})|]$ . 在每步迭代中, 未知的解混迭矩阵  $\mathbf{V}$  是一列一列地分别求得. 为了求解  $\mathbf{V}$  的一列  $\mathbf{v}_i$ , 计算  $\mathbf{Q}_i = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^N (\mathbf{C}^k \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^H \mathbf{C}^{kH} + \mathbf{C}^{kH} \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^H \mathbf{C}^k)$  需要  $4KN^2(N-1)$  MDN, 通过  $\mathbf{E}_{s,N} \mathbf{V} \mathbf{E}_{i,N}$  置换  $\mathbf{V}$  的行和列可以看做不需要 MDN, 计算  $\mathbf{c}_s^H = [-\mathbf{b}^H \mathbf{B}^{-1}, 1] \mathbf{E}_{s,N}$  需要  $\frac{(N-1)^3}{3} + (N-1)^2$  的 MDN, 最终, 计算  $\mathbf{v}_i = e^{j\varphi} \frac{\mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{c}_s}{\sqrt{2\mathbf{c}_s^H \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{c}_s}}$  需要  $\frac{N^3}{3} + N^2 + 2N$  的 MDN. 所以, 在忽略阶数低于  $O(KN^3)$  的 MDN 后, 计算  $\mathbf{v}_i$  需要  $4KN^3$  MDN. 因而, 在 FAJD 算法的每一步迭代中, 在忽略所有阶数低于  $O(KN^4)$  的 MDN 的情况下, 计算  $\mathbf{V}$  的所有列共需要  $4KN^4$  MDN.

对于 FJD 算法, 计算式(11)中的  $\mathbf{w}_{mn}$  需要  $16 + \frac{64}{3} + 80K$  的 MDN, 计算所有的  $\frac{N(N-1)}{2}$  个  $\mathbf{w}_{mn}$  需要  $40KN^2 - 40KN + \frac{56}{3}N^2 - \frac{56}{3}N$  的 MDN, 然后得到每步的解混迭矩阵  $\mathbf{V}_{(n)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_{(n)}) \mathbf{V}_{(n-1)}$  需要  $N^3$  MDN. 显然地, 在每步迭代中, 在忽略所有阶数低于  $O(KN^2)$  和  $O(N^3)$  MDN 的情况下, FJD 算法只需要  $40KN^2 + N^3$  的 MDN.

以上详细分析说明,在每步迭代中,FJD 算法的计算复杂度量级要小于 ACDC 和 FAJD 算法.同时,比较三种方法的计算步骤可知,FJD 算法更简单更易操作.

### 4 仿真结果

在本节中,我们通过三个实验来分析 FJD 算法性能.首先给出两个性能指标.

第一个性能指标为矩阵  $\mathbf{V}\mathbf{C}^k\mathbf{V}^H, (k = 1, \dots, K)$  所有非对角线元素的平方和,这一参数显然和代价函数值一致,因此将其记为  $L(\mathbf{V})$ :

$$L(\mathbf{V}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N |(\mathbf{V}\mathbf{C}^k\mathbf{V}^H)_{ij}|^2 \quad (12)$$

由于  $L(\mathbf{V})$  反映的只是 FJD 算法采用式(4)的代价函数的变化趋势,因此我们只将其应用在实验 1 中,来说明 FJD 算法针对式(4)代价函数的有效性.

第二个性能指标,我们用全局拒噪水平(Global Rejection Level, GRL)来描述估计得到的解混迭矩阵和混迭矩阵之间的差异,定义为<sup>[2~4,6]</sup>:

$$\text{GRL} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N \frac{|g_{ij}|}{\max_k |g_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \frac{|g_{ij}|}{\max_k |g_{kj}|} - 1 \right) \quad (13)$$

其中,  $g_{ij}$  为矩阵  $\mathbf{G} = \mathbf{V}\mathbf{A}$  的第  $i$  行第  $j$  列元素. GRL 是盲源分离领域公认的一个科学且重要的性能参数.我们的三个实验都将利用这一参数作为衡量算法有效性的重要指标.

**实验 1** 在本实验中,我们利用合成的无噪声目标矩阵组来说明 FJD 算法的快速性及有效性.给出  $N \times N$  的目标方阵组  $\mathbf{C}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H$ , 其中  $K = 15, N = 7$ , 混迭矩阵  $\mathbf{A}$  和每一个对角阵  $\mathbf{A}^k (k = 1, \dots, K)$  都是随机产生的复值矩阵. FJD 算法初值给定为:  $\mathbf{V}_{(0)} = \mathbf{I}$ . 独立运行 20 次实验.图 1 给出的是参数 GRL 随迭代次数变化的性能曲线.图 2 给出的是参数  $L(\mathbf{V})$  随迭代次数的变化曲线.图 1 和图 2 说明,在无噪声的情况下, FJD 算法能很快收敛,且收敛值与真实值之间的误差极小.

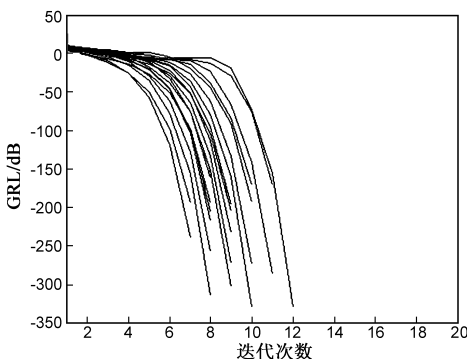


图1 GRL随迭代次数变化曲线

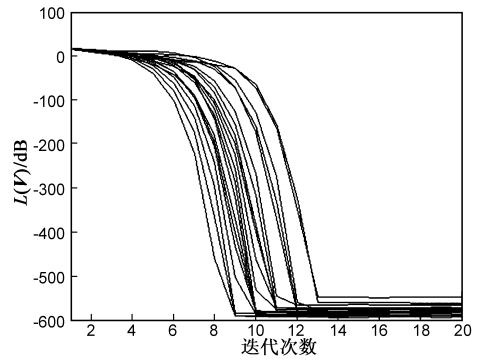


图2  $L(\mathbf{V})$ 随迭代次数变化曲线

**实验 2** 在本实验中,我们利用合成的带噪声目标矩阵组来说明 FJD 算法的快速性及有效性.并且,同现存的,可同样应用于复数域的非酉联合对角化方法 ACDC 算法<sup>[4]</sup>和 FAJD 算法<sup>[5]</sup>进行比较.给出  $N \times N$  的目标方阵组  $\mathbf{C}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H + \Delta\mathbf{C}^k (k = 1, \dots, K)$ , 其中  $K = 15, N = 5$ . 需要特别指出的是,在本实验中,每一个对角阵  $\mathbf{A}^k (k = 1, \dots, K)$  均为实值矩阵,且每个噪声矩阵  $\Delta\mathbf{C}^k (k = 1, \dots, K)$  为 Hermitian 的,这样设置的目的是为了满 ACDC 算法中对目标矩阵组必须为 Hermitian 的要求(从这一点上来说,同 ACDC 算法相比, FJD 算法和 FAJD 算法具有更广的适用性).为了表征噪声矩阵的强度,将不含噪声部分  $\mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H$  和噪声部分  $\Delta\mathbf{C}^k$  的比表示为  $\text{NER}^{[10]}$ :

$$\text{NER} = 10\log_{10} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^H\|_F^2}{\|\Delta\mathbf{C}^k\|_F^2} \quad k = 1, \dots, K \quad (14)$$

在仿真中,产生噪声矩阵  $\Delta\mathbf{C}^k (k = 1, \dots, K)$  以分别满足  $\text{NER} = 10\text{dB}, 15\text{dB}, 20\text{dB}$ . 首先,将 FJD 算法在三个不同的 NER 情况下,运行 15 次独立实验.图 3 所示为在不同的 NER 下, FJD 算法进行 15 次独立运行时, GRL 随迭代次数的变化曲线.表明了带噪的情况下, FJD 算法依然能快速收敛.然后,在每个不同的 NER 情况下, FJD, ACDC 和 FAJD 三个算法均独立运行 50 次.在不同 NER 下,三种算法 50 次运行结果的平均 GRL 随代

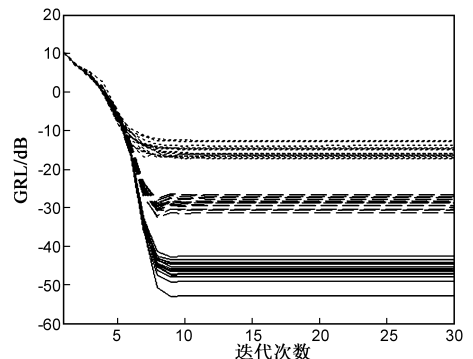


图3 GRL随迭代次数变化曲线,点线:NER=10dB,虚线:NER=15dB,实线:NER=20dB

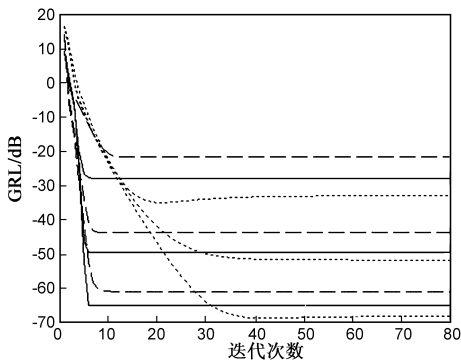


图4 在NER=10dB, 15dB, 20dB三种情况下, GRL随迭代次数变化曲线, 点线:ACDC, 虚线:FAJD, 实线:FJD

次数的变化曲线示于图4. 图3表明了带噪的情况下, FJD算法依然能快速收敛. 从图4的比较结果来看, FJD算法的收敛速度略快于FAJD算法, ACDC算法收敛速度最慢; 而收敛后的性能, ACDC算法好于FJD算法, FJD算法好于FAJD算法. 但是, 即使在NER=10dB这种噪声较大的情况, 收敛后FJD算法的收敛误差也低于了-27dB, 即图4说明了FJD算法快速的收敛速度和良好的收敛性能.

**实验3** 在本实验中, 我们利用FJD算法来估计信道参数, 恢复源信号, 解决盲源分离问题. 给出四个零均值统计独立的复值源信号:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sin(3200\pi t) + j\cos(1900\pi t), \\ s_2(t) &= \sin(180\pi t) + j\sin(400\pi t), \\ s_3(t) &= \sin(20\pi t)\sin(600\pi t) + j\cos(20\pi t)\cos(600\pi t), \\ s_4(t) &= \sin[600\pi t + 6\cos(120\pi t)] + j\cos(900\pi t). \end{aligned}$$

这4个源信号被冲击响应为复值矩阵A的四个阵元接收, 噪声矩阵为 $N = \text{randn}(4, T) + j\text{randn}(4, T)$  ( $T$ 为总的样本数). 利用FJD算法估计混迭矩阵A的逆矩阵, 并估计出4个源信号. 信噪比设定为15dB, 样本数为500, 10个待对角化目标矩阵通过式(2)和式(3)所示方法产生. 首先, 运行50次独立实验, 平均GRL随迭代次数的变化曲线示于图5. 然后, 任意抽取50次独立实验中的一次, 查看源信号的恢复结果: 图6所示为源信号

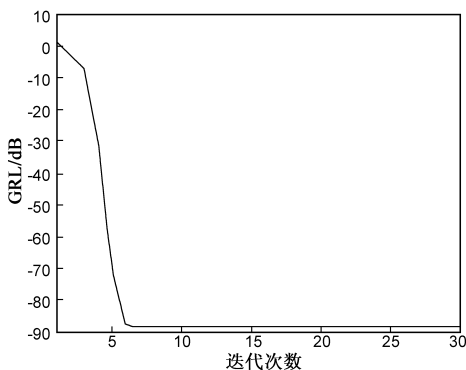


图5 GRL随迭代次数变化曲线

的星座图, 图7所示为接收信号的星座图, 图8所示为恢复信号的星座图. 观察图5至图8可知, 当源信号(图6所示)被混迭矩阵充分混合且存在较大噪声情况下(图7所示)的情况下, FJD算法仍能快速收敛(图5所示)且能够很好的恢复出源信号(图8所示). 当然, 比较图6与图8可知, FJD算法的分离结果也显示了在盲源分离领域中固有的排列不定性和尺度不定性<sup>[12]</sup>.

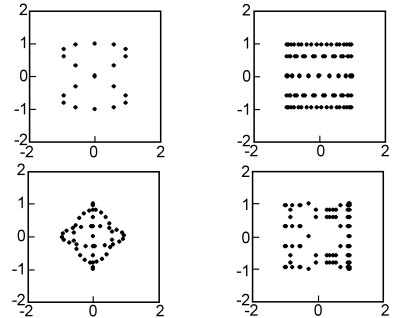


图6 源信号星座图

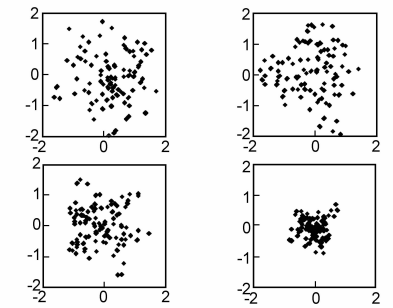


图7 接收信号星座图

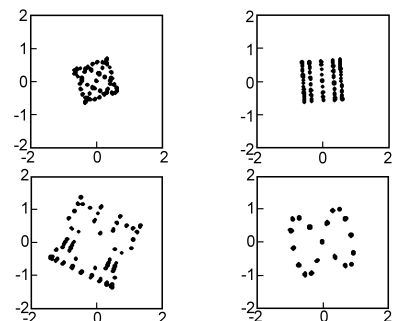


图8 FJD算法恢复信号星座图

## 5 结束语

本文提出了一种快速的联合对角化方法, 通过求解一组目标矩阵组的联合对角化器, 解盲源分离问题. 算法不要求目标矩阵为正定, 不需要白化操作, 避免了白化预处理引入的误差; 也不限定目标矩阵为实数, 能够处理复值问题, 具有极广的适用性. 算法计算复杂度低, 收敛速度快, 性能良好, 可有效解决盲源分离问题.

参考文献:

- [1] J F Cardoso, A Souloumiac. Blind beamforming for non-Gaussian signals[J]. IEE Proceeding-F, 1993, 140(6): 362-370.

- [2] A Belouchrani, K A Meraim, J F Cardoso, et al. A blind source separation technique using second-order statistics [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(2): 434 – 444.
- [3] A Souloumiac. Nonorthogonal joint diagonalization by combining givens and hyperbolic rotations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6): 2222 – 2231.
- [4] A Yeredor. Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(7): 1545 – 1553.
- [5] X L Li, X D Zhang. Nonorthogonal joint diagonalization free of degenerate solution [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(5): 1803 – 1814.
- [6] A Ziehe, P Laskov, G Nolte, et al. A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation [J]. Journal of Machine Learning Research, 2004, 5: 777 – 800.
- [7] R Vollgraf, K Obermayer. Quadratic optimization for simultaneous matrix diagonalization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(9): 3270 – 3278.
- [8] P Tichavsky, A Yeredor. Fast approximate joint diagonalization incorporating weight matrices [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(3): 878 – 891.
- [9] D Z Feng, X D Zhang, Z Bao. An efficient multistage decom-

position approach for independent components [J]. Signal Processing, 2003, 83(1): 181 – 197.

- [10] D Z Feng, W X Zheng, A Cichocki. Matrix-group algorithm via improved whitening process for extracting statistically independent sources from array signals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(3): 962 – 977.
- [11] A Horn, C R Johnson. Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [12] L Tong, R W Liu, V C Soon, et al. Indeterminacy and identifiability of blind source separation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1991, 38(5): 499 – 509.

#### 作者简介:



徐先峰 男, 1982年3月出生, 出生于山东宁阳, 博士. 主要研究方向为盲信号处理.  
E-mail: xuxianfeng1982@163.com

冯大政 男, 1959年12月出生, 出生于陕西紫阳, 教授, 博士生导师. 长期从事自适应信号处理、阵列信号处理、盲信号处理、雷达信号处理等方面的研究工作.

E-mail: dzfeng@xidian.edu.cn